

מתכונת 2016 ב

שאלה 1

סעיף א

גוף A נוסע בארבעה מקטעים של מהירות קבועה:

זמן	מהירות
$0s \leq t \leq 5$	$2 \frac{m}{s}$
$5s < t \leq 10$	$4 \frac{m}{s}$
$10s < t \leq 20$	$-2 \frac{m}{s}$
$20s < t \leq 25$	$1 \frac{m}{s}$

גוף B נוסע בתנועב שוות תאוצה. הוא מתחיל במהירות 4 מטר לשניה ונוסע במהירות בתאוצה שלילית:

$$a = \frac{-2 - 4}{25} = -0.24 \frac{m}{s^2}$$

מהירותו מתאפסת בזמן $t = 16.67s$ ולאחר מכן המהירות הופכת שלילית.

סעיף ב

(1)

משוואת מקום זמן של גוף A

$$x = 2t$$

משוואת מקום זמן של גוף B

$$x = 4t - \frac{1}{2} \times 0.24t^2$$

(2)

אפשר לבדוק את המרחקים שעשו הגופים בזמנים 5, 10, 20, 25

אחרי 5 שניות:

$$x_B = 4 \times 5 - \frac{1}{2} \times 0.24 \times 5^2 = 17m$$
$$x_A = 2 \times 5 = 10m$$

כלומר, לא היה מפגש ב- 5 השניות הראשונות

אחרי 10 שניות:

$$x_B = 4 \times 10 - \frac{1}{2} \times 0.24 \times 10^2 = 28m$$
$$x_A = 10 + 4 \times 5 = 30m$$

ניתן לראות, שבפרק הזמן הזה, גוף A עוקף את גוף B, כלומר יש ביניהם מפגש. על מנת לבדוק את זמן המפגש, אפשר לבנות נוסחת מקום זמן לגוף A בחלק השני של תנועתו ולהשוות לנוסחת המקום זמן של גוף B

$$4t - \frac{1}{2} \times 0.24t^2 = 10 + 4(t - 5)$$

$$t = 9.13s$$

סעיף ג

על מנת לחשב את המהירות הממוצעת נבדוק את סכום המרחקים שעשה מהשניה 5 עד השניה 20

$$\Delta x = 4 \times 5 - 2 \times 10 = 0m$$

$$v_{average} = 0 \frac{m}{s}$$

סעיף ד

(1)

מצאנו בסעיף א את התאוצה.

$$a = 0.24 \frac{m}{s^2}$$

תאוצה על מדרון משופע היא:

$$a = g \sin \alpha$$

$$0.24 = 10 \sin \alpha$$

$$\alpha = 1.38^\circ$$

(2)

המהירות של הגוף היא חיובית (בעוד התאוצה שלילית) לכן הגוף נע במעלה המישור.

שאלה 2

סעיף א

(1)

אורכו של קפיץ 2 קטן מאורכו של קפיץ 1. קפיץ 2 שווה לתאוצה של המסה הימנית בלבד. קפיץ 1 שווה לתאוצה של שתי המסות ולכן הוא מתוח יותר.

(2)

שקול הכוחות על המסה הימנית:

$$k\Delta l_1 = ma$$

$$50000 \times \Delta l_1 = 5000 \times 1$$

$$\Delta l_1 = 0.1m$$

שקול הכוחות על המסה השמאלית:

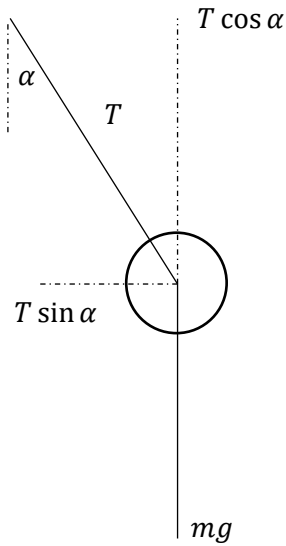
$$k\Delta l_2 - k\Delta l_1 = ma$$

$$50000 \times \Delta l_2 - 50000 \times 0.1 = 5000 \times 1$$

$$\Delta l_2 = 0.2m$$

סעיף ב

(1)



ההטיה נובעת מכך ששקול הכוחות הפועל על הנורה אינו 0 אלא הוא שווה לשיעור הכוח שפועל על הנורה על מנת שתנוע בתאוצה שבה כל המערכת נעה. את הכוח מפעיל החוט באמצעות המתיחות ברכיב ה- x.

(2)

$$T \cos \alpha - mg = 0$$

$$T \sin \alpha = ma$$

$$\frac{T \sin \alpha}{T \cos \alpha} = \frac{ma}{mg}$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{10}$$

$$\alpha = 5.71^\circ$$

סעיף ג

אם הקטר ממשיך במהירות קבועה, לא פועל כח על הקרונויות ולכן הקפיצים לא מתארכים מעבר למצב הרפוי.

סעיף ד

(1)

הקרון יתחיל בתנועה הרמונית. כאשר הקטר נבלם, הקפיץ נמצא בשיווי משקל והקרון נמצא במהירות הגבוהה ביותר. הוא יכווץ את הקפיץ עד שמהירותו תתאפס, בהמשך הקפיץ יפעיל עליו כוח ויחזירו לנקודת שיווי המשקל במהירות בכיוון ההפוך. הקרון יביא להתארכות הקפיץ עד מהירות אפס וחוזר חלילה.

(2)

אפשר לחשב משיקולי אנרגיה:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}k\Delta l^2$$

$$\Delta l = \sqrt{\frac{5000 \times 3^2}{50000}} = 0.95m$$

(3)

כדי לכתוב נוסחת מקום זמן, עלינו למצוא את המהירות הזוויתית של הקרון:

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{50000}{5000}} = \sqrt{10}$$

$$x = 0.95 \cos \sqrt{10}t$$

שאלה 3**סעיף א**

(1)

התנע ההתחלתי של המערכת (הילד עם הקטר והכדור) היא 0. לכדור הנזרק יש תנע. לפי חוק שימור התנע, לילד והקטר צריך להיות תנע בגדול זהה לכיוון ההפוך.

(2)

$$mv = Mv_{child+train}$$

$$v_{child+train} = \frac{1 \times 7}{20} = 0.35 \frac{m}{s}$$

$$v = \omega r$$

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{0.35}{1} = 0.35 \frac{rad}{s}$$

סעיף ב

(1)

הכוח שגורם לתאוצה הוא הכוח הנורמלי שהמסילה מפעילה על הגלגל. התאוצה היא בכיוון מרכז המעגל. כוח זה נוצר באזור המגע בין המסילה לגלגל. בגלל שהמסילה נוגעת בחלקו הפנימי של הגלגל, כוח זה יכול להיווצר בגלגלים הימנים, שקרובים יותר למרכז המעגל.

(2)

$$F = ma$$

$$F_r = a_r m = \frac{v^2}{r} \times m = \frac{0.35^2}{1} \times 20 = 2.45N$$

סעיף ג

אורכו של חצי סיבוב:

$$\pi r = 3.14m$$

העבודה:

$$W = F\Delta x = 3.14 \times 2.45 = 7.693J$$

סעיף ד

(1)

אורך המרחק שבו פועל הכוח זהה למה שחושב בסעיף ג.

הכוח הוא כוח החיכוך:

$$f = \mu N = 0.001 \times 20 \times 10 = 0.2N$$

העבודה:

$$W = 0.2 \times 3.14 = 0.628J$$

(2)

האנרגיה של הילד היא:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times 20 \times 7^2 = 490J$$

בכל סיבוב מאבד הילד 0.628 ג'אול.

לכן, כדי שהילד יעצר עליו לעבור:

$$n = \frac{490}{0.628} = 780.25 \text{ circles}$$

שאלה 4

סעיף א

המהירויות לא זהות. ככל שהרדיוס גדול יותר, כך יש לגוף יותר אנרגיה פוטנציאלית שמומרת לאנרגיה קינטית. לכן, הגוף שמשוחרר בקערה 1 יהיה בעל מהירות גבוהה יותר.

$$2mgR_2 = mgR_1$$

$$2E_{k2} = E_{k1}$$

$$2 \times \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$2v_2^2 = v_1^2$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{2}$$

סעיף ב

הכוח שמפעילים הגופים שווה לכוח הרדיאלי.

$$F_{r1} = \frac{v_1^2}{R_1} \times m$$

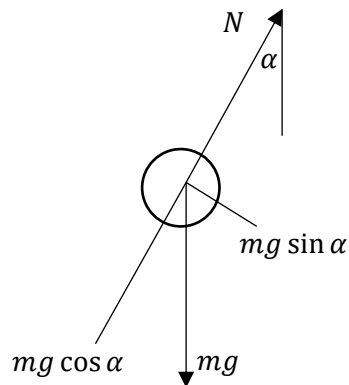
$$F_{r2} = \frac{v_2^2}{R_2} \times m$$

$$F_{r1} = \frac{2v_2^2}{2R_2} \times m = \frac{v_2^2}{R_2} \times m$$

כלומר, הכוחות שווים.

סעיף ג

(1)



(2)

תנועה הרמונית פשוטה מתקיימת בתנאים אלו:

- א. התנועה היא מחזורית בין שני קצוות
- ב. הכוח השקול הפועל על הגוף נמצא ביחס ישר להעתק הגוף מנקודת שיווי המשקל של התנועה
- ג. כוח זה מכון תמיד אל נקודת המרכז.

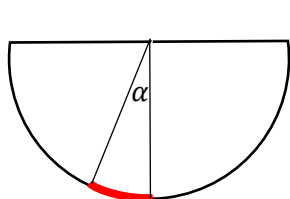
הכוח הפועל על הגוף בכיוון התנועה הוא:

$$F = mg \sin \alpha$$

תנאי ג מתקיים כי כוח זה פועל תמיד לכיוון תחתית הקערה. התנאי של תנועה מחזורית (תנאי א) מתקיים גם, בגלל המרות האנרגיה. אנרגיית הגובה היא מקסימלית בקצוות ומינימלית בתחתית והאנרגיה הקינטית היא מינימלית בקצוות ומקסימלית בתחתית.

תנאי ב מתקיים בזכות הקירוב המופיע בשאלה. ההעתק מנקודת שיווי המשקל הוא הקשת שעליה נע הגוף. הקשת מסומנת באדום. זהו ההעתק של הגוף בנקודה שמתאימה לזווית α

העתק זה ניתן לחישוב:



$$\Delta x = \frac{\alpha}{2\pi} \times 2\pi R = \alpha R$$

כלומר, ההעתק נמצא ביחס ישר ל- α והכוח נמצא ביחס ישר ל- $\sin \alpha$

אבל, בזכות הקירוב $\alpha \approx \sin \alpha$ ניתן לקבוע שהכוח נמצא ביחס ישר להעתק ולכן מדובר בתנועה הרמונית פשוטה.

סעיף ד

$$\omega = \frac{\sqrt{a}}{R} = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = \frac{2\pi R}{\sqrt{g \sin \alpha}}$$

כלומר, זמן המחזור תלוי ברדיוס:

$$R_1 > R_2$$

ולכן:

$$T_1 > T_2$$

סעיף ה

לפי הנוסחה מסעיף ד, זמן המחזור מושפעת מתאוצת הכבידה.

יש לחשב את תאוצת הכבידה על מאדים:

$$g_M = \frac{GM_M}{R_M^2} = \frac{6.67 \times 10^{-11} \times 0.642 \times 10^{24}}{(3.4 \times 10^6)^2} = 3.7 \frac{m}{s^2}$$

היחס בין זמני המחזור:

$$\frac{T_M}{T_E} = \frac{2\pi \sqrt{\frac{l}{g_M}}}{2\pi \sqrt{\frac{l}{g_E}}} = \sqrt{\frac{g_E}{g_M}} = \sqrt{\frac{10}{3.7}} = 1.64$$

כלומר, זמן המחזור יהיה גדול יותר פי 1.64.

שאלה 5

סעיף א

$$h = 400km = 4 \times 10^5 m$$

$$R = R_E + h = 6.38 \times 10^6 + 4 \times 10^5 = 6.78 \times 10^6 m$$

נשווה לירח לפי משפט קפלר:

$$\left(\frac{T}{T_m}\right)^2 = \left(\frac{R}{R_m}\right)^3$$

$$\left(\frac{T}{27.3}\right)^2 = \left(\frac{6.78 \times 10^6}{3.84 \times 10^8}\right)^3$$

$$T = 0.064 \text{ days} = 1.54 \text{ hours}$$

סעיף ב

הקפיץ מאזן את כוח הכבידה:

$$F = \frac{GMm}{R^2}$$

$$F = \frac{6.67 \times 10^{-11} \times 5.974 \times 10^{24} \times 2}{(6.78 \times 10^6)^2} = 17.34 N$$

$$17.34 = k\Delta l = 200\Delta l$$

$$\Delta l = 0.087 m$$

סעיף ג

(1)

על מנת שהכדור יעצר ויפול אנכית אל פני כדור הארץ יש לירות את הכדור אנכית מעלה. בכל כיוון אחר הכדור לא יעצר כי יהיה לו רכיב תנועה אופקי.

(2)

$$h = 2000km = 2 \times 10^6 m$$

$$R = R_E + h = 6.38 \times 10^6 + 2 \times 10^6 = 8.38 \times 10^6 m$$

משיקולי שימור אנרגיה:

$$E_k + U_G = E_k + U_G$$
$$0 - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{R_E} + \frac{1}{2}mv^2$$

$$v = \sqrt{-2GM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_E}\right)}$$

$$v = \sqrt{-2 \times 6.67 \times 10^{-11} \times 5.974 \times 10^{24} \left(\frac{1}{6.38 \times 10^6} - \frac{1}{8.38 \times 10^6} \right)}$$

$$v = 5460 \frac{m}{s}$$

סעיף ד

(1)

האנרגיה הכוללת של גוף הנמצא במסלול מעגלי סביב כדור הארץ תלויה ברדיוס שבו נמצא הגוף:

$$E = -\frac{GMm}{2r}$$

אם הרדיוס קטן, האנרגיה קטנה ולכן יש להעניק לגוף אנרגיה, כדי להחזירו למסלול.

(2)

האנרגיה הדרושה לתחנת החלל היא:

$$E_0 = -\frac{GMm}{2(6.78 \times 10^6)}$$

אחרי איבוד 2 ק"מ מגובה המסלול האנרגיה היא:

$$E_2 = -\frac{GMm}{2(6.76 \times 10^6)}$$

אחרי הוספת ק"מ אחד האנרגיה היא:

$$E_1 = -\frac{GMm}{2(6.77 \times 10^6)}$$

נבדוק את הפרשי האנרגיה:

$$E_0 - E_1 = 108.93 \times 10^{-12} J$$

$$E_1 - E_2 = 109.25 \times 10^{-12} J$$

כלומר, אחרי שרדיוס ההקפה גדל בק"מ אחד, הושקעה יותר ממחצית מהאנרגיה הדרושה לחזרה למסלול.

אפשר לראות זאת גם מבחינה מתמטית:

$$E_0 = -\frac{GMm}{2r_0}$$

$$E_1 = -\frac{GMm}{2r_1}$$

$$E_2 = -\frac{GMm}{2r_2}$$

$$E_0 - E_1 = -\frac{GM}{2} \times \frac{r_0 - r_1}{r_0 r_1}$$

$$E_1-E_2=-\frac{GM}{2}\times\frac{r_1-r_2}{r_1r_2}$$

ידוע ש:

$$r_0-r_1=r_1-r_2$$

אבל:

$$r_0r_1< r_1r_2$$

ולכן:

$$E_0-E_1>E_1-E_2$$

כמו שהתקבל בחישוב.